ETABLISSEMENT :	TYPE D'EVALUATION :	NIVEAU & SECTION
LYCEE 9 avril 1938 Boumhel	DEVOIR DE SYNTHESE N° 1	4ème Sciences Exp
ANNEE SCOLAIRE : 2018-2019	COMPOSITION DE : MATHEMATIQUES	DATE : Décembre 2018
	DUREE DE L'EPREUVE :	ENSEIGNANT :
	2h' — COEF : 3	HOUSSEM EDDINE FITATI

AUTORISATIONS :

Calculatrice scientifique : Oui

SUJET :

Exercice N°1 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1. a- Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que : $f'(x)=-\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$.

   b- Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$

   a- Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

   b- Montrer que l'équation : $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]1,2[$.

3. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

   a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $1\leq U_n<2$.

   b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

   c- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|1-\alpha|$.

   d- Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

Exercice N°2 : (5 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta)\ z^2-2z-2i\sin\theta e^{i\theta}=0$ où $\theta\in]0,\pi[$.

1. a- Montrer que : $1+2i\sin\theta e^{i\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^2$.

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E_θ).

2. Soit $f(z)=z^3-4z^2+2\left(2-i\sin\theta e^{i\theta}\right)z+4i\sin\theta e^{i\theta}$.

   a- Calculer $f(2)$.

   b- Vérifier que $f(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$.

   c- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=0$

3. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On désigne par : A,B et C les points d'affixes $2, 1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$.

a- Montrer que $OBAC$ est un rectangle.

b- Déterminer θ pour que $OBAC$ soit un carré.

Exercice N°3 : (5 points)

Soit *f* la fonction définie sur $\left[1,+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

On désigne par ζ la courbe représentative d'une fonction *f* dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier la dérivabilité de *f* à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Montrer que *f* est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.
3. Dresser le tableau de variation de *f* .
4. Soit *g* la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ g(0)=1 \end{cases}$

   a- Montrer que *g* est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

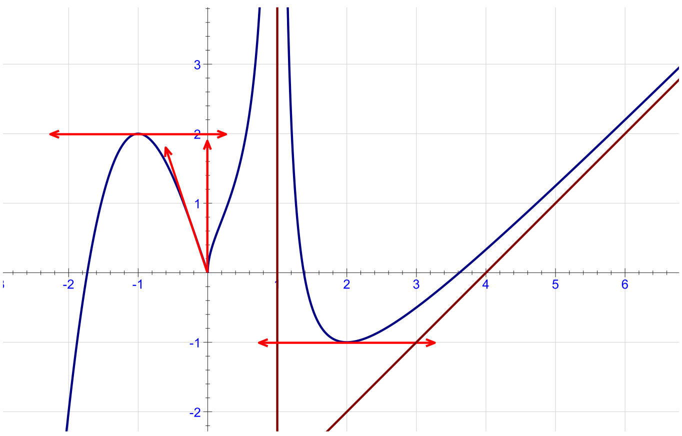
   b- Montrer que *g* est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $g'(x)=\dfrac{-1}{1+\sin x}$

   c- Montrer que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $:-1\leq g'(x)\leq -\dfrac{1}{2}$.

   d- Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $:1-x\leq g(x)\leq 1-\dfrac{1}{2}x$.

Exercice N°4 :(4 points)

On considère la fonction *f* dont la représentation graphique ζ .
On note : ζ admet les droites : *x=1* comme asymptote verticale, *y=x-4* comme asymptote oblique au voisinage de (+∞) et une branche parabolique de direction (*Oy*) au voisinage de (-∞).



En se basant sur le graphique de *f*, déterminer

1. L'ensemble de définition de *f* et son domaine de dérivabilité.
2. Déterminer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,

   $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{f(x)-x+4}$

3. Déterminer : f'(-1) , f'(2) , $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.
4. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction : $\sqrt{f'(x)}$.
5. Déterminer : $f\left(\left[0,1\right[\right)$ et $f\left(\left]1,+\infty\right[\right)$

BON TRAVAIL